

REVISÃO MATEMÁTICA

Prof. André Medeiros de Andrade
andre.medeiros@ufvjm.edu.br

Medida de Comprimento:

- Metro: unidade básica para representar medidas de comprimento no sistema internacional.

Quilômetro	Hectômetro	Decâmetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m



- O **ponto**, a **reta** e o **plano** são entes geométricos fundamentais.
- a) Ponto:**
- É a **menor unidade** de medida da geometria.
 - Cada ponto P de um plano cartesiano corresponde a um **par ordenado** (x, y) . e, inversamente, cada par (x, y) tem como seu correspondente um ponto P do plano $\rightarrow P(x, y)$.
 - Representados por **letras maiúsculas** do nosso alfabeto (A, B, ...).



b) Reta:

- Formada por 2 ou mais pontos colineares (mesma linha).
- Menor distância entre dois pontos distintos.
- Representadas por **letras minúsculas** do nosso alfabeto (a, b, ...).

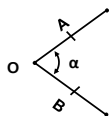


c) Plano:

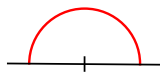
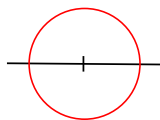
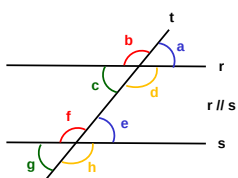
- Formado por infinitas retas (e consequentemente, também é formado por infinitos pontos).
- Objeto geométrico infinito a duas dimensões.
- Representados por **letras gregas minúsculas** do nosso alfabeto (α , β , ...).



- **Ângulo:** abertura formada por duas semiretas que partem de um mesmo ponto.
- **Lados do ângulo:** semiretas que formam o ângulo.
- **Vértice do ângulo:** ponto de origem das semiretas.

**Notação:**

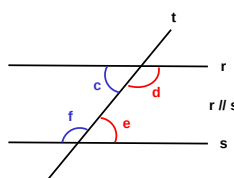
- ângulo **AOB**:
 - **OA** e **OB** são lados do ângulo.
 - Ponto **O** é o vértice.
 - A medida de um ângulo **AOB** será representada por **AÔB**.
 - Um ângulo de $60^\circ \rightarrow \mathbf{A\hat{O}B = 60^\circ}$

Ângulo raso: 180° Circunferência: 360° Ângulo reto: 90° **Ângulos de duas paralelas cortadas por uma transversal:**

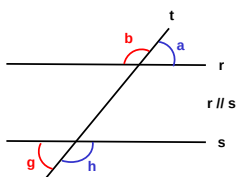
Nomenclatura	Propriedade
Correspondentes a-e; b-f; c-g; d-h	Congruentes

Ângulos Correspondentes e Congruentes:

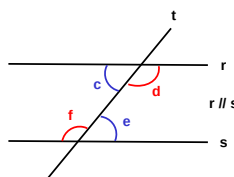
Possuem a mesma medida (ângulo).

Ângulos de duas paralelas cortadas por uma transversal:

Nomenclatura	Propriedade
Colaterais Internos c-f; d-e	Suplementares

Ângulos Colaterais Internos e Suplementares:Soma dos ângulos é igual a 180° .**Ângulos de duas paralelas cortadas por uma transversal:**

Nomenclatura	Propriedade
Colaterais Externos a-h; b-g	Suplementares

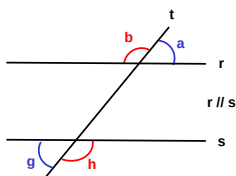
Ângulos Colaterais Externos e Suplementares:Soma dos ângulos é igual a 180° .**Ângulos de duas paralelas cortadas por uma transversal:**

Nomenclatura	Propriedade
Alternos Internos c-e; d-f	Congruentes

Ângulos Alternos Internos e Congruentes:

Geometricamente iguais (mesma medida).

Ângulos de duas paralelas cortadas por uma transversal:



Nomenclatura

Alternos Externos
a-g; b-h

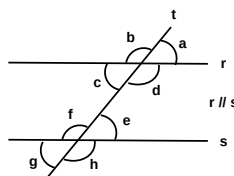
Propriedade

Congruentes

Ângulos Alternos Externos e Congruentes:

Geometricamente iguais (mesma medida).

Ângulos de duas paralelas cortadas por uma transversal:



Nomenclatura

Correspondentes
a-e; b-f; c-g; d-h

Propriedade

Congruentes

Colaterais Internos
c-f; d-e

Suplementares

Colaterais Externos
a-h; b-g

Suplementares

Alternos Internos
c-e; d-f

Congruentes

Alternos Externos
a-g; b-h

Congruentes

- Os ângulos são medidos por:

- Graus (°): 0 a 360°.
- Minutos ('): 0' a 60'.
- Segundos ("): 0" a 60".

- Variam de 0° a 360°, sendo:

- 1° equivale a 60', ou seja, $1' = \frac{1^\circ}{60}$.
- 1' equivale a 60", ou seja, $1'' = \frac{1'}{60}$.

Unidades de medida:

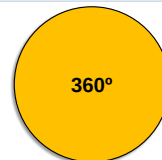
Angulares

➤ **Grau sexagesimal** = $\frac{1}{360}$ da circunferência.

- Grau: 0 – 360°
- Minuto: 0 – 59,99'
- Segundo: 0 – 59,99"

Ex:

176° 32' 44,87" = 176 graus, 32 minutos 44,87 segundos



Unidades de medida:

Angulares

➤ **Grau decimal** = 0 – 359,999999° (manter 6 casas decimais)

a) Grau, minutos e segundos → Graus decimais

$$176^\circ 32' 44,87'' = 176 + \frac{32}{60} + \frac{44,87}{3600} = 176,545796^\circ \text{ graus decimais}$$

b) Graus decimais → Grau, minutos e segundos

$$176,545796^\circ = 176^\circ 32' 44,8656''$$

$$0,545796^\circ \times 60' = 32,74776'$$

$$0,74776' \times 60'' = 44,8656''$$

Exercício:

Transformar os ângulos da forma sexagesimal para a forma decimal (e vice versa):

- $3^\circ 15' 32'' \rightarrow 3,258888^\circ$
- $306^\circ 25' 02'' \rightarrow 306,417222^\circ$
- $25,168055^\circ \rightarrow 25^\circ 10' 05''$
- $50,983333^\circ \rightarrow 50^\circ 59' 00''$

Exercício:

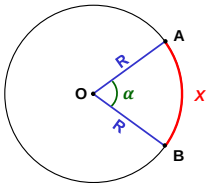
Execute as operações.

- a) $59^{\circ} 09' 45'' + 39^{\circ} 35' 36'' \rightarrow 98^{\circ} 45' 21''$
 b) $00^{\circ} 02' 50'' + 02^{\circ} 20' 00'' \rightarrow 02^{\circ} 22' 50''$
 c) $59,1625^{\circ} + 39,5933^{\circ} \rightarrow 98,7558^{\circ}$
 d) $23,6874^{\circ} + 15,2570^{\circ} \rightarrow 38,9444^{\circ}$
 e) $59^{\circ} 09' 45'' - 39^{\circ} 35' 36'' \rightarrow 19^{\circ} 34' 09''$
 f) $280^{\circ} 10' 20'' - 139^{\circ} 05' 15'' \rightarrow 141^{\circ} 05' 05''$
 g) $79,5632^{\circ} - 25,4106^{\circ} \rightarrow 54,1526^{\circ}$
 h) $280,1722^{\circ} - 139,0875^{\circ} \rightarrow 141,0847^{\circ}$

Desenho				
Grau	90	180	270	360
Radiano	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Radiano: unidade de medida de ângulos.

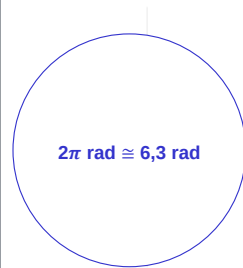
- Se o comprimento do arco (X) é igual ao raio (R), o ângulo α é equivalente a 1 radiano (1 rad).



- Circunferência de centro O
- Pontos A e B
- Raio OA e OB
- X: arco AB da circunferência
- α ângulo associado ao arco AB

Radiano:

- Quantos radianos contém uma circunferência?



$$1 \text{ rad} \cong 57^{\circ}$$

Radiano:

- Para transformar um valor em **grau para radiano**:

$$2\pi \text{ rad} = 360^{\circ}$$

$$x = y^{\circ}$$

- Para transformar um valor em **radiano para grau**:

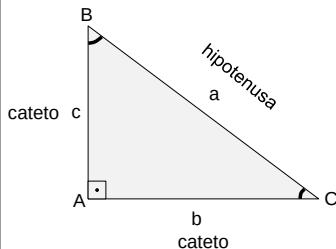
$$2\pi \text{ rad} = 360^{\circ}$$

$$y \text{ rad} = x$$

- Na topografia, a trigonometria é utilizada para relacionar medidas angulares com medidas lineares.
 - Saber ângulos de inclinações de terreno a partir da distância horizontal e altura;
 - Calcular a altura de um prédio sem necessariamente subir nele;
 - Etc.

➤ Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo:

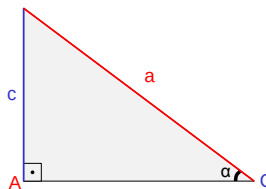
- A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo = 180° .
- Possui um ângulo reto e a soma dos outros dois ângulos = 90° .



➤ Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo:

Seno:

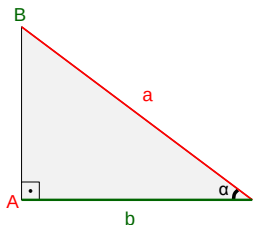
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{Cateto Oposto (c)}}{\text{Hipotenusa (a)}}$$



➤ Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo:

Cosseno:

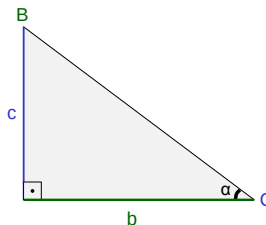
$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{Cateto Adjacente (b)}}{\text{Hipotenusa (a)}}$$



➤ Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo:

Tangente:

$$\text{Tg } \alpha = \frac{\text{Cateto Oposto (c)}}{\text{Cateto Adjacente (b)}}$$



➤ Calculando Seno, Cosseno e Tangente na calculadora:

- Para calcular o seno de $16^\circ 48' 30''$:
 - Transformar o ângulo na forma decimal e depois calcular o seno (algumas máquinas tem a função que decimaliza ângulos diretamente).
 - Digitar: $(\text{sen})16,8166^\circ$ ou $(\text{sen})16^\circ 48' 30'' = 0,2893$

Exercício:

Calcule:

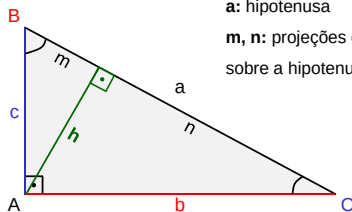
- Sen de $59^\circ 09' 45'' \rightarrow 0,858624$
- Cos de $00^\circ 02' 50'' \rightarrow 0,999999$
- Tan de $59,1625^\circ \rightarrow 1,675022$

Qual é o valor dos ângulos?

- Sen de $X = 0,245 \rightarrow 14^\circ 10' 54,6''$
- Cos de $X = 0,67 \rightarrow 47^\circ 55' 58,57''$
- Tan de $X = 1,675 \rightarrow 59^\circ 09' 43,81''$

➤ Relações Métricas com o Triângulo Retângulo:

b, c: catetos
h: altura relativa à hipotenusa
a: hipotenusa
m, n: projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa

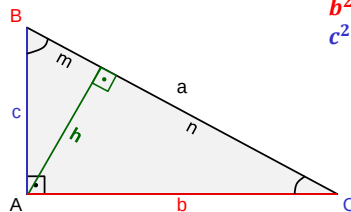


➤ Relações Métricas com o Triângulo Retângulo:

- O quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

$$b^2 = a \times n$$

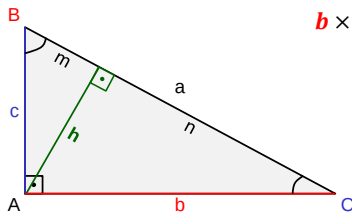
$$c^2 = a \times m$$



➤ Relações Métricas com o Triângulo Retângulo:

- O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à hipotenusa.

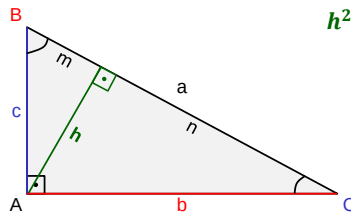
$$b \times c = a \times h$$



➤ Relações Métricas com o Triângulo Retângulo:

- O quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

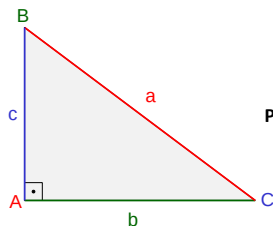
$$h^2 = m \times n$$



➤ Teorema de Pitágoras:

- A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$\text{Pitágoras: } a^2 = b^2 + c^2$$

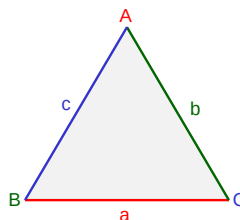


➤ Lei dos Senos:

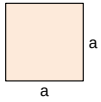
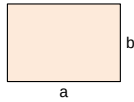
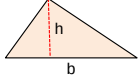
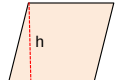
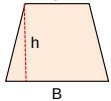
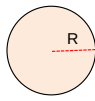
- Aplicada para a resolução de qualquer triângulo não retângulo.

$$\text{Lei dos senos}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



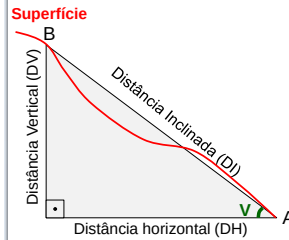
Geometria – Áreas planas

Quadrado $A = a \cdot a = a^2$ Retângulo $A = a \cdot b$ Triângulo $A = \frac{b \cdot h}{2}$ Paralelogramo $A = b \cdot h$ Trapézio $A = \frac{b + B}{2} \cdot h$ Círculo $A = \pi \cdot R^2$ 

Distância Horizontal

➤ Cálculo da distância horizontal:

- **Distância horizontal (DH):** distância medida entre dois pontos no plano horizontal.
- **Ângulo vertical (V):** ângulo formado no vértice A, pelas retas DH e DI.

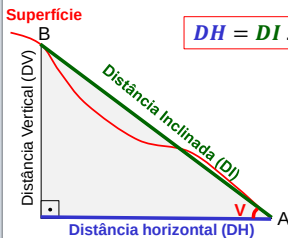


Distância Horizontal

a) Cálculo da distância horizontal (DH) a partir do ângulo vertical (V) e da distância inclinada (DI):

$$\cos \alpha = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \cos (V) = \frac{DH}{DI}$$

$$DH = DI \cdot \cos (V)$$

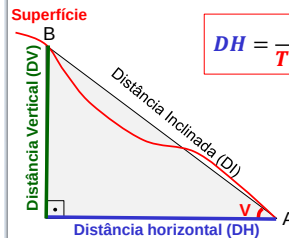


Distância Horizontal

b) Cálculo da distância horizontal (DH) a partir do ângulo vertical (V) e da distância vertical (DV):

$$\tan \alpha = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} = \tan (V) = \frac{DV}{DH}$$

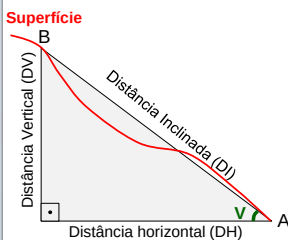
$$DH = \frac{DV}{\tan (V)}$$



Distância Vertical

➤ Cálculo da distância vertical ou Diferença de Nível:

- **Distância vertical (DV):** distância medida entre dois pontos em um plano vertical que é perpendicular ao plano horizontal.

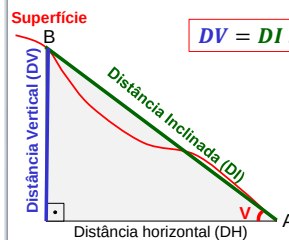


Distância Vertical

a) Cálculo da distância vertical (DV) a partir do ângulo vertical (V) e a distância inclinada (DI):

$$\sin \alpha = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \sin (V) = \frac{DV}{DI}$$

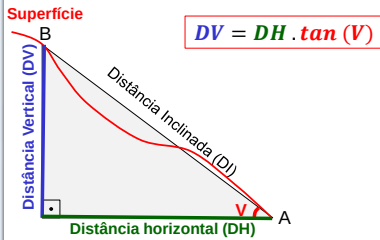
$$DV = DI \cdot \sin (V)$$



Distância Vertical

b) Cálculo da distância vertical (DV) a partir do ângulo vertical (V) e a distância horizontal (DH):

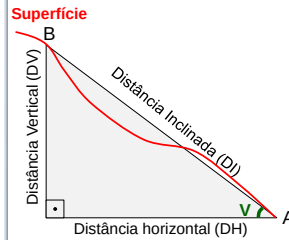
$$\tan \alpha = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} = \tan (V) = \frac{DV}{DH}$$



Distância Inclinada

➤ Cálculo da distância inclinada:

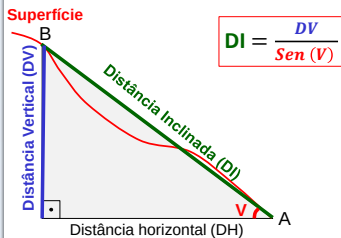
- **Distância inclinada (DI):** distância medida entre dois pontos, seguindo a inclinação da superfície do terreno.



Distância Inclinada

a) Cálculo da distância inclinada (DI) a partir da distância vertical (DV) e do ângulo vertical (V):

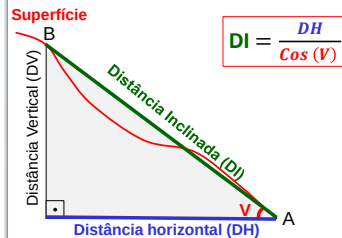
$$\sin \alpha = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \sin (V) = \frac{DV}{DI}$$



Distância Inclinada

b) Cálculo da distância inclinada (DI) a partir da distância horizontal (DH) e do ângulo vertical (V):

$$\cos \alpha = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \cos (V) = \frac{DH}{DI}$$



EXERCÍCIOS

Exercício:

1. Através de dados obtidos em um levantamento topográfico, calcule a distância horizontal:

- Distância vertical: 15 m
Ângulo vertical: $06^{\circ} 00' 36''$ $DH = \frac{15}{\tan(06^{\circ} 00' 36'')} = 142,476 \text{ m}$
- Distância vertical: 150 m
Ângulo vertical: $16^{\circ} 00' 00''$ $DH = \frac{150}{\tan(16^{\circ} 00' 00'')} = 523,110 \text{ m}$
- Distância inclinada: 150 m
Ângulo vertical: $02^{\circ} 10' 00''$ $DH = 150 \cdot \cos(02^{\circ} 10' 00'') = 149,892 \text{ m}$
- Distância inclinada: 3 km
Ângulo vertical: $02^{\circ} 10' 00''$ $DH = 3 \cdot \cos(02^{\circ} 10' 00'') = 2,9978 \text{ km}$

Exercício:

2. Através de dados obtidos em um levantamento topográfico, calcule a distância vertical:

- a) Distância horizontal: 1.670 m $DV = 1.670 \cdot \tan(00^\circ 10' 36'') = 5,149 \text{ m}$
 Ângulo vertical: $00^\circ 10' 36''$
- b) Distância inclinada: 250 m $DV = 250 \cdot \sin(02^\circ 10' 00'') = 9,463 \text{ m}$
 Ângulo vertical: $02^\circ 10' 00''$

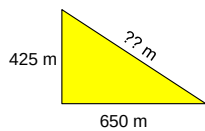
Exercício:

3. Através de dados obtidos em um levantamento topográfico, calcule a distância inclinada:

- a) Distância horizontal: 167 m $DI = \frac{167}{\cos(00^\circ 10' 36'')} = 167,0 \text{ m}$
 Ângulo vertical: $00^\circ 10' 36''$
- b) Distância vertical: 250 m $DI = \frac{250}{\sin(02^\circ 10' 00'')} = 6.612,627 \text{ m}$
 Ângulo vertical: $02^\circ 10' 00''$

Exercício:

4. Você foi contratado para delimitar o perímetro total do limite de um terreno triangular com as medidas perpendiculares de 425 m e 650 m. Qual é o perímetro total em km?



$$a^2 = b^2 + c^2$$

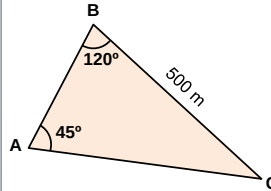
$$a = \sqrt{425^2 + 650^2}$$

$$a = 776,61 \text{ m}$$

Perímetro total: 1,85161 km

Exercício:

5. Através do levantamento topográfico de um terreno, obteve-se os dados a seguir. Com base nesse levantamento, qual é o comprimento do segmento $\overline{AC}$?



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{500}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 120^\circ}$$

$\overline{AC} = 612,37 \text{ m}$

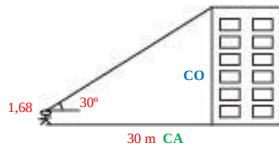
6. Sabendo que um indivíduo com 1,68 m de altura encontra-se a 30 m de distância de um prédio cujo topo observa com um ângulo de 30° , determine a altura do prédio.

$$\tan \alpha = \frac{CO}{CA} \quad \tan 30^\circ = \frac{CO}{30}$$

$$0,577350269 \cdot 30 = CO$$

$$17,32 = CO$$

$$h = 17,32 + (\approx 1,68) = 19 \text{ m}$$



6. Sabendo que um indivíduo com 1,68 m de altura encontra-se a 30 m de distância de um prédio cujo topo observa com um ângulo de 30° , determine a altura do prédio.

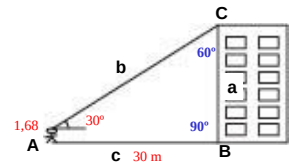
Ou

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{30}{\sin 60^\circ}$$

$$a = 17,32 \text{ m}$$

$$17,32 \text{ m} + 1,68 \text{ m} = 19 \text{ m}$$



7. Determine a área de um terreno retangular que possui um lado medindo 20 m e o ângulo formado entre dois vértices diagonais é de 35°.

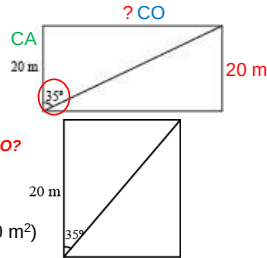
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CO}{CA} \quad \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{CO}{20}$$

$$0,700207538 \cdot 20 = CO$$

$$14 = CO \quad \text{REPRESENTAÇÃO?}$$

$$A = 14 \times 20 = 280 \text{ m}^2$$

$$0,028 \text{ hectare (1 ha = 10.000 m}^2\text{)}$$



8. Qual a escala de um mapa em que a distância entre dois pontos que se encontram a 45 m está representada por 1,25 cm.

$$E = \frac{d}{D} \quad d = 1,25 \text{ cm} \quad E = 1,25 / 4500 = 0,000277778 \quad 1:E$$

$$D = 45 \text{ m} = 4500 \text{ cm} \quad 1/0,000277778 \quad 1:3600 = 4500/1,25$$

9. Em um mapa na escala 1:500 dois pontos estão separados por 3 cm. Qual a distância real entre estes pontos?

$$1 = 500$$

$$3 = x$$

$$x = 1500 \text{ cm} = 15 \text{ m}$$

10. Em uma planta na escala 1:100 um terreno está representado por uma área de 35 cm². Qual a área real deste terreno?

$$R = r \times M^2 \quad r = 35 \text{ cm}^2 \quad R = 35 \times 100^2 \quad 10.000 \text{ cm}^2 = 1 \text{ m}^2 \quad 35 \text{ m}^2$$

$$M = 100 \quad 350.000 \text{ cm}^2 \quad 350.000 \text{ cm}^2 = x \text{ m}^2$$

$$\text{Obs.: } 1 \text{ m}^2 = 100 \times 100 \text{ cm} = 10.000 \text{ cm}^2$$